ユークリッドの互除法と連分数展開

2021 年度入試から大学入学共通テストと名称が変更されたが，その前の前は共通一次学力試験出会った。その試験に次の問題が出題された。

> 問題
>
> 自然数 k, m が $2+\cfrac{1}{k+\cfrac{1}{m+\cfrac{1}{5}}}=\dfrac{803}{371}$ を満たせば，$k=\boxed{\text{ウ}}$, $m=\boxed{\text{エオ}}$ である。
>
> （’84 年　共通一次本試験）

803 と 371 の最大公約数は 1 であり，分数 $\dfrac{803}{371}$ は既約分数である。ユークリッドの互除法によって 803 と 371 の最大公約数を求める手順に従うと，

$803=371\times2+61$

$371=61\times6+5$

$61=5\times12+1$

となる。この内容を次のように分数の形で表すことができる。

$$\frac{803}{371}=\frac{371\times2+61}{371}=2+\frac{61}{371}=2+\cfrac{1}{\cfrac{371}{61}}=2+\cfrac{1}{\cfrac{61\times6+5}{61}}$$

$$=2+\cfrac{1}{6+\cfrac{5}{61}}=2+\cfrac{1}{6+\cfrac{1}{\cfrac{61}{5}}}=2+\cfrac{1}{6+\cfrac{1}{\cfrac{5\times12+1}{5}}}=2+\cfrac{1}{6+\cfrac{1}{12+\cfrac{1}{5}}}$$

この結果，先の問題の答えが，$k=6$, $m=12$ であることがわかる。

この手順は，小数部分α（$0<\alpha<1$）を$\alpha=\cfrac{1}{\cfrac{1}{\alpha}}$ と表し，$\dfrac{1}{\alpha}$（>1）を整数部分 n と小数部分βに分ける。すなわち，$\dfrac{1}{\alpha}=n+\beta$（$n$ は整数，$0<\beta<1$）と表す。次に小数部分βについても同様に，$\dfrac{1}{\beta}$（>1）を整数部分と小数部分に分ける。これを繰り返すのである。これによって分数 $\dfrac{p}{q}$（p, q は正の整数）は，整数 $b_0, b_1, b_2, \cdots\cdots, b_m$ を用いて，

$$\frac{p}{q}=b_0+\cfrac{1}{b_1+\cfrac{1}{b_2+\ddots+\cfrac{1}{b_{m-1}+\cfrac{1}{b_m}}}}$$

の形に表すことができる。この形の分数を（有限）**連分数**という。

無理数についても，分数と同様に（無限）連分数に展開することを考えてみよう。
$\sqrt{3}$を例として，

$$\sqrt{3}=1+(\sqrt{3}-1)=1+\cfrac{1}{\cfrac{1}{\sqrt{3}-1}}=1+\cfrac{1}{\cfrac{\sqrt{3}+1}{2}}=1+\cfrac{1}{1+\cfrac{\sqrt{3}-1}{2}}=1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{\cfrac{2}{\sqrt{3}-1}}}$$

$$=1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{\sqrt{3}+1}}=1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{2+(\sqrt{3}-1)}}=1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{\sqrt{3}-1}}}=1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{\cfrac{\sqrt{3}+1}{2}}}}$$

$$=1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{\sqrt{3}+1}}}}=\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{1+\ddots}}}}}$$ □

となる。

この計算を途中で止めて，連分数

$$1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{2}}\left(=\frac{5}{3}=1.66\cdots\right),\qquad 1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{1}}}\left(=\frac{7}{4}=1.75\right),$$

$$1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{2}}}}\left(=\frac{19}{11}=1.7272\cdots\right),\qquad 1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{1}}}}}\left(=\frac{26}{15}=1.733\cdots\right),$$

……　を作っていくと，$\sqrt{3}$ の近似分数となっていく。

この連分数によって作られる整数の組(5, 3)，(7, 4)，(19, 11)，(26, 15)，…… は 2 つの方程式 $x^2-3y^2=-2$，$x^2-3y^2=1$ の解になっている。なぜだろう？

このように，いろいろな値を連分数展開してみると面白い結果が得られるかもしれない。試しに円周率πを連分数展開して，近似分数を求めてみたらどうなるだろうか。